УДК 629.191

ВАРИАЦИОННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО КРИТЕРИЮ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В. И. Миронов,
доктор техн. наук, профессор
Ю. В. Миронов,
доктор техн. наук, старший научный сотрудник
Р. М. Юсупов,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Рассматривается применение вариационного подхода для решения задач навигационного оценивания параметров движения космических аппаратов по критерию наименьших квадратов на основе совместной обработки измерительных данных бортовой навигационной аппаратуры потребителя, работающей по сигналам спутниковой радионавигационной системы. Приводится численный пример.

Ключевые слова *— статистическое оценивание, нелинейные динамические системы, критерий наименьших квадратов, навигация космических аппаратов.*

Введение

В настоящее время при определении орбит космических аппаратов (КА) преимущественно пользуются методами, основанными на совместной обработке результатов наблюдений по полной выборке, среди которых часто используется известный метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод также находит широкое применение при обработке количественных результатов естественно-научных опытов, технических данных, астрономических и геодезических наблюдений и измерений. Распространенность МНК во многом обусловлена тем, что при решении задач оценивания данным методом не требуется знания статистических характеристик ошибок измерений, которые во многих случаях неизвестны или известны с невысокой точностью.

Технология МНК для решения различных прикладных задач применительно к динамическим системам и навигации КА широко освещена в отечественной и зарубежной литературе [1–6 и др.]. Она предусматривает составление критерия оптимальности, формирование нормальной системы уравнений и получение оптимальной оценки. По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

Наряду с этим МНК может быть реализован на основе использования условий оптимальности оценок вариационного типа. Вопросы обоснования и разработки соответствующей вариационной технологии рассматривались в работах авторов [7, 8] применительно к оцениванию состояния нелинейных динамических систем.

В настоящее время завершается полномасштабное развертывание отечественной космической навигационной системы ГЛОНАСС, что создает широкие возможности по использованию навигационной аппаратуры потребителя (НАП) в бортовых комплексах управления КА. Известно, однако, что космические навигационные системы подвержены воздействию помех [9]. Поэтому в процессе функционирования НАП могут возникать ситуации, связанные с возможной потерей работоспособности по каналам определения координат или скорости движения объекта на определенных участках полета. Для обеспечения точности и надежности навигации в состав бортового алгоритмического обеспечения целесообразно включить соответствующие алгоритмы решения навигационной задачи при возникновении таких ситуаций.

Данная работа посвящена рассмотрению алгоритмических вопросов применения вариационного подхода для автономного определения параметров орбитального движения КА по текущим оценкам параметров движения, формируемым бортовой НАП, работающей по навигационным спутникам в штатных и нештатных условиях функционирования. Совместной статистической обработке подвергается полная выборка наблюдений на заданном временном интервале МНК. Приводятся результаты статистического моделирования процесса навигационного оценивания с использованием модели движения КА в нецентральном гравитационном поле Земли.

Постановка задачи и вариационные условия оптимальности оценок

Рассмотрим задачу оценивания параметров движения динамического объекта, которая заключается в наилучшем в некотором смысле определении n-мерного вектора его исходного состояния $\mathbf{x}_0$ на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_j, заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$.

Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ t \in [t_0, T].$$

Измерениям подвергается m-мерный вектор

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t)].$$

Измеренное значение вектора $\boldsymbol{\psi}$ в момент t_i обозначим как $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\mathbf{y}(t_i) = \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i)] + \boldsymbol{\delta}_i,\quad i = 1(1)N,\quad t_i \in [t_0, T].$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений.

Требуется найти такую оценку вектора $\mathbf{x}_0$, которая обеспечивает минимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \{\mathbf{y}(t_i) - \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i)]\}^T \mathbf{W}_i \{\mathbf{y}(t_i) - \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i)]\},$$

где $\mathbf{W}_i$ — симметрические матрицы весовых коэффициентов.

Функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i)]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

Для решения поставленной задачи авторами были получены [7] условия оптимальности оценок вариационного типа, которые заключаются в следующем: оптимальная оценка вектора $\mathbf{x}_0$ и соответствующая ей оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t);\quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda},$$

при граничных условиях

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}(T) = 0;$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}^T(t_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{W}_i \{\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i)]\},\ i = 1(1)N.$$

Согласно этим условиям для получения оптимальной оценки вектора $\mathbf{x}_0$ необходимо решить краевое уравнение

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_0, T) = 0,$$

заданное неявно на процедурах интегрирования сопряженных систем дифференциальных уравнений. Для этого можно применить известные численные методы поиска корней нелинейных уравнений, например метод Ньютона, его модификации и др.

Определение параметров орбиты КА по результатам измерений

Рассмотрим особенности применения вариационного метода наименьших квадратов на примере решения задачи статистического оценивания параметров движения КА по результатам текущих навигационных измерений, проводимых его бортовой аппаратурой, работающей по сигналам спутниковой навигационной системы. Движение КА будем рассматривать в нецентральном гравитационном поле Земли. Соответствующие уравнения движения в абсолютной геоцентрической системе координат имеют вид [10]

$$\dot{x} = v_x;\ \dot{y} = v_y;\ \dot{z} = v_z;\ \dot{v}_x = \left(-\frac{\mu}{r^3} + p\right)x;$$

$$\dot{v}_y = \left(-\frac{\mu}{r^3} + p\right)y;\ \dot{v}_z = \left(-\frac{\mu}{r^3} + p + \Delta p\right)z;$$

$$p = \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3} J_{20}\left(1 - 5\frac{z^2}{r^2}\right)\left(\frac{R_e}{r}\right)^2;\ \ \Delta p = 3\frac{\mu}{r^3} J_{20}\left(\frac{R_e}{r}\right)^2;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\quad J_{20} = -1082627 \cdot 10^{-9},$$

где x, y, z — проекции вектора положения $\mathbf{r}$ КА; u_x, u_y, u_z — проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ КА; R_e = 6378,136 км — экваториальный радиус Земли; $\mu = 398\,600{,}44$ км^3/с^2 — постоянная притяжения Земли.

Проводятся прямые полные дискретные измерения элементов векторов **r** и **v**, так что модель измерений принимает вид

$$\mathbf{y}_{1_i} = \mathbf{r}(t_i) + \delta\mathbf{r}_i;\quad \mathbf{y}_{2_i} = \mathbf{v}(t_i) + \delta\mathbf{v}_i,\quad i = 1(1)N,$$

где $\delta\mathbf{r}_i$, $\delta\mathbf{v}_i$ — ошибки оценок НАП, полученных в моменты времени t_i.

Составим далее соответствующую сопряженную систему дифференциальных уравнений. Анализ показывает, что при обработке навигационных данных на малых мерных интервалах в модели сопряженной системы можно ограничиться членами, соответствующими ньютоновской части гравитационного поля. В этом случае будем иметь следующую систему сопряженных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = \frac{\pi_0}{r^3}\left[\boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3}{r^2}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T)\boldsymbol{\lambda}_v\right];\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\boldsymbol{\lambda}_r,$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v]^T = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T.$$

Теперь в соответствии с приведенными выше вариационными условиями оптимальности для оценивания вектора начального состояния КА $\mathbf{q} = [\mathbf{r}_0,\ \mathbf{v}_0]^T$ необходимо решить двухточечную краевую задачу для приведенных систем уравнений движения и сопряженных уравнений с учетом следующих граничных условий:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = 0;\ \ \boldsymbol{\lambda}(T) = 0;\ \ \boldsymbol{\lambda}_r(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}_r(t_i^-) + [\mathbf{y}_1 - \mathbf{r}(t_i)];$$

$$\boldsymbol{\lambda}_v(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}_v(t_i^-) + [\mathbf{y}_2 - \mathbf{v}(t_i)],\quad i = 1(1)N.$$

В ситуациях, когда достоверными являются измерения НАП только дальностей до навигационных спутников, на выходе НАП формируются оценки только позиционного вектора **r**, так что модель измерений принимает вид

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{r}(t_i) + \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_i,$$

где $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}_i$ — ошибки измерений вектора координат.

В этом случае в соответствии с изложенным выше для оптимального оценивания вектора начального состояния КА $\mathbf{q}_0 = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]^T$ необходимо решить двухточечную краевую задачу для приведенных выше уравнений движения и сопряженных уравнений с учетом следующих измененных граничных условий:

$$\boldsymbol{\lambda}_r(t_0) = 0;\ \ \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) = 0;\ \ \boldsymbol{\lambda}(T) = 0;$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r(t_i^+) = \boldsymbol{\lambda}_r(t_i^-) + [\mathbf{y}_i - \mathbf{r}(t_i)],\ \ i = 1(1)N.$$

В каждом из указанных случаев решение задачи сводится к поиску корней краевого уравнения

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{q},\ T) = 0,$$

где через **q** обозначено неизвестное начальное значение вектора состояния КА $\mathbf{x}_0$.

Применение метода Ньютона дает следующий итерационный алгоритм:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k - \left[\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{q}, T)}{\partial\mathbf{q}}\right]_k^{-1} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{q}_k, T),\quad k = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Приведем некоторые результаты вычислений.

Расчеты проводились для спутника, находящегося на орбите с большой полуосью $a = 7071$ км и эксцентриситетом $e = 0{,}02$. С помощью датчика случайных величин по нормальному закону распределения на мерном интервале $T = 100$ с моделировалась с шагом $\Delta t = 1$ с статистическая выборка прямых измерений вектора текущего состояния КА. При этом предельные ошибки измерений задавались значениями 100 м по элементам вектора координат и 1 м/с — по элементам вектора скорости. Для анализа сходимости итерационных процессов начальное приближение оцениваемого вектора отклонялось от его точного значения по координатам на 50 км, а по элементам вектора скорости — на 50 м/с.

Некоторые результаты расчетов приведены в табл. 1–4. В табл. 1 и 2 представлены результаты вычислений при оценивании НАП полного вектора текущего состояния КА: в табл. 1 — точные значения параметров начального фазового состояния КА в абсолютной геоцентрической системе координат, принятое начальное приближение элементов уточняемого вектора, полученные в результате вариационной обработки измерений оптимальные оценки, а также характеристики точности оценивания; в табл. 2 — значения ошибок оценивания по итерациям.

■ ***Таблица 1.*** *Результаты оптимального оценивания* (*полные измерения*)

Оцениваемый параметр	x_0, км	y_0, км	z_0, км	v_{x_0}, км/с	v_{y_0}, км/с	v_{z_0}, км/с
Точное значение	598,727	–4912,859	4876,239	0,66481	5,34894	5,41448
Начальное приближение	648,727	–4862,859	4926,239	0,71481	5,39894	5,46448
Оптимальная оценка	598,730	–4912,857	4876,243	0,66477	5,34893	5,41451
Ошибка оценивания	0,003	0,002	0,004	–0,00005	–0,00001	0,00002

■ ***Таблица 2.*** *Сходимость процесса оценивания (полные измерения)*

Номер итерации	Ошибка оценивания					
	δx_0, м	δy_0, м	δz_0, м	δv_{x_0}, м/с	δv_{y_0}, м/с	δv_{z_0}, м/с
0	50 000	50 000	50 000	50	50	50
1	3,4	3,1	4,2	–0,3	0,7	1,1
2	3,0	–2,0	4,0	–0,05	–0,01	0,02
3	3,0	–2,0	4,0	–0,05	–0,01	0,02

■ ***Таблица 3.*** *Результаты оптимального оценивания (позиционные измерения)*

Оцениваемый параметр	x_0, км	y_0, км	z_0, км	v_{x_0}, км/с	v_{y_0}, км/с	v_{z_0}, км/с
Точное значение	598,727	–4912,859	4876,239	0,66481	5,34894	5,41448
Начальное приближение	648,727	–4862,859	4926,239	0,71481	5,39894	5,46448
Оптимальная оценка	598,730	–4912,866	4876,250	0,66478	5,34911	5,41437
Ошибка оценивания	0,003	–0,007	0,011	–0,00004	0,00017	0,00011

■ ***Таблица 4.*** *Сходимость процесса оценивания (позиционные измерения)*

Номер итерации	Ошибка оценивания					
	δx_0, м	δy_0, м	δz_0, м	δv_{x_0}, м/с	δv_{y_0}, м/с	δv_{z_0}, м/с
0	50 000	50 000	50 000	50	50	50
1	2,4	–6,3	10,1	–0,2	0,11	1,1
2	1,1	–7,0	11,0	–0,04	–0,17	0,11
3	1,1	–7,0	11,0	–0,04	–0,17	0,11

В табл. 3 и 4 даны аналогичные результаты статистической обработки только позиционных измерений НАП.

Приведенные данные свидетельствуют о достаточно высокой точности и скорости сходимости вычислительных процессов вариационного оценивания. При обработке позиционных измерений, как и следовало ожидать, точность получаемых оценок оказывается ниже точности оценок, соответствующих обработке полного вектора измерений НАП, однако она остается на приемлемом уровне.

Заключение

Предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов навигационного оценивания КА по данным спутниковой навигации, а также оптимального оценивания нелинейных динамических объектов различных типов в составе автоматизированных комплексов обработки наблюдений и мониторинга динамического состояния процессов. Алгоритмы вариационного типа могут применяться самостоятельно или параллельно с традиционными алгоритмами прямого оптимального оценивания для контроля правильности вычислений и обеспечения надежности расчетов. Они могут также найти применение при решении задач тестирования приближенных алгоритмов оценивания и обоснования эффективного состава и программы измерений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-08-00259).

Литература

1. **Аким Э. Л., Энеев Т. М.** Определение параметров движения космических аппаратов по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1. № 1. С. 5–50.
2. **Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.** Определение траекторий КА. — М.: Машиностроение, 1978. — 216 с.
3. **Космические** траекторные измерения / Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. — М.: Сов. радио, 1969. — 504 с.
4. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1958. — 350 с.

5. **Статистические** методы обработки результатов наблюдений / Под ред. Р. М. Юсупова; МО СССР, 1984. — 563 с.
6. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений. — М.: Наука, 1976. — 416 с.
7. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Метод наименьших квадратов в задачах вариационного оценивания состояния нелинейных динамических систем // Информационно-управляющие системы. 2009. № 6. С. 2–6.
8. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Вариационное оценивание состояния нелинейной динамической системы по критерию максимального правдоподобия // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 11. С. 2–6.
9. **Управление** и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / Под ред. М. Н. Красильщикова и Г. Г. Себрякова. — М.: Физматлит, 2003. — 280 с.
10. **Мамон П. А., Половников В. И., Слезкинский С. К.** Баллистическое обеспечение космических полетов / ВИКИ им. А. Ф. Можайского. — Л., 1990. — 622 с.

IX МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ» — SICPRO’12

30 января – 2 февраля 2012 г.
Москва

Ведущий организатор
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Цель конференции
Конференция SICPRO’12 имеет своей целью собрать вместе ученых, работающих во всех областях современной теории управления, для обсуждения таких вопросов, как: развитие теории и методологии идентификации, моделирования и управления; математические задачи теории управления; параметрическая идентификация; непараметрическая идентификация; структурная идентификация и экспертный анализ; задачи выбора и анализ данных; системы управления с идентификатором; задачи идентификации в интеллектуальных системах; прикладные задачи идентификации; имитационное моделирование; методическое и программное обеспечение идентификации и моделирования; когнитивные аспекты идентификации; верификация и проблемы качества программного обеспечения сложных систем; глобальные сетевые ресурсы поддержки процессов идентификации, управления и моделирования.

Условия участия
Конференция SICPRO’12 проводится:
— без регистрационного взноса;
— без ограничений на объем доклада.

Направления работы конференции
Структурная идентификация.
Параметрическая идентификация.
Непараметрическая идентификация.
Интеллектуальные методы идентификации.
Обработка сигналов.
Стохастические системы.
Адаптивные и робастные системы.
Методы оптимизации.
Приложения методов идентификации.

Контрольные сроки
Представление полных текстов докладов — не позднее 1 июля 2011 г.
Информация о принятии докладов — не позднее 1 октября 2011 г.
Объявление Программы конференции — не позднее 1 декабря 2011 г.
Заседания конференции SICPRO’12 — 30 января — 2 февраля 2012 г.

Дополнительная информация и справки
По всем организационным вопросам обращаться к Кириллу Чернышеву, Елене Ярко.
Эл. почта: noc@sicpro.org
Факс: + 7 (495) 334-89-90.
Телефон: + 7 (495) 334-89-90.
Официальный сайт конференции:
www.sicpro.org