УДК 621.391

РАСЧЕТ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНОГО КОДИРОВАНИЯ В ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОМ КАНАЛЕ

Е. А. Крук[а, б], *доктор техн. наук, профессор*
В. Б. Прохорова[б], *заместитель директора*
[а]*Институт информационных систем и защиты информации Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*
[б]*Институт информационных технологий в образовании Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Постановка проблемы: *для борьбы с искажениями, возникающими в канале связи, необходимо описывать ошибки, типичные для данного канала, что требует задания модели канала, позволяющей производить расчет вероятностей в ней. Простейшие классические модели каналов связи оказываются неадекватными при описании современных систем передачи информации. Требуется рассматривать более сложные модели, что влечет за собой и задачу выполнения расчетов в данных моделях.* ***Результаты:*** *рассмотрен двумерный частотно-временной канал связи, для которого вычисляются переходные вероятности в канале с конечным числом состояний, позволяющие применить методику расчета вероятности ошибочного декодирования в одномерном (частотном или временном) канале к оценке вероятности ошибки в двумерном канале. Расчеты по полученным выражениям во многих практических случаях могут потребовать чрезмерных вычислительных ресурсов, поэтому предлагается методика упрощения вычислений через последовательное сокращение числа рассматриваемых состояний с учетом допустимой погрешности вычислений.* ***Практическая значимость:*** *полученные результаты позволяют выбирать вычислительно приемлемую модель канала, для которой можно получить удовлетворительные оценки вероятности ошибочного декодирования.*

Ключевые слова *— частотно-временной канал связи; коды, исправляющие ошибки; вероятность ошибочного декодирования.*

Введение

Задача построения модели для реальных каналов связи вызывает неизменный исследовательский интерес [1–3] и далека от своего решения. Для описания дискретных каналов с памятью, как правило, используют модели с конечным числом состояний [4–6]. Расчеты вероятности ошибочного декодирования в таких каналах связаны со значительными вычислительными затратами. В работе [7] был изложен подход к вычислению вероятности ошибки в каналах с конечным числом состояний.

В настоящей работе тот же подход применяется к расчетам для типичного векторного канала с конечным числом состояний, так называемого частотно-временного (ЧВ) канала [8–11].

Вычисление вероятности ошибочного декодирования в ЧВ-канале. Точные формулы

Рассмотрим частотно-временной $(n_\omega \times n_t)$-канал, т. е. канал, словами которого являются $(n_\omega \times n_t)$- матрицы $\mathbf{X} = \|x_{ij}\|_{n_\omega \times n_t}$. Каждой строке $\mathbf{x}_i$ такой матрицы поставим в соответствие элемент z_i из поля $GF(2^{(n_t)})$. Тогда матрице $\mathbf{X}$ будет соответствовать последовательность $z_1, \ldots, z_{n_\omega}$, а выходной последовательности $(n_\omega \times n_t)$ ЧВ-канала ..., $\mathbf{X}^{-j}$, $\mathbf{X}^{-j+1}$, ..., $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{X}^1$, ..., $\mathbf{X}^j$, ... — 2^{n_t}-ичная последовательность

$$\ldots, z_1^{-j}, \ldots, z_{n_\omega}^{-j}, \ldots, z_1^0, \ldots, z_{n_\omega}^0, \ldots, z_1^j, \ldots, z_{n_\omega}^j, \ldots. \quad (1)$$

Канал Z с выходной последовательностью $\ldots, z_{jn_\omega}, \ldots, z_{(j+1)n_\omega}, \ldots$, полученной из $(n_\omega \times n_t)$ ЧВ-канала указанным выше способом, мы будем называть расширенным ЧВ-каналом.

Предположим, что дискретное отображение частотных подканалов ЧВ-канала есть канал Гильберта [2, 5] и поставим в соответствие каждому частотному подканалу последовательность состояний гильбертова канала. Тогда каждой строке $\mathbf{x}_i^j$ матрицы $\mathbf{X}^j$ и, следовательно, каждому символу расширенного канала z_i^j будет соответствовать n_t-последовательность состояний $\mathbf{c}_i^j = (c_{i_1}(j), \ldots, c_{i_{n_t}}(j))$, $c_{ii_1}(j) \in \{\mathrm{G}, \mathrm{B}\}$, где G — хорошее, а B — плохое состояния канала Гильберта. Поскольку вероятность появления хотя бы одной единицы в строке определяется числом элементов B в последовательности $\mathbf{c}_i^j$, то канал Z является каналом с n_t+1 состояниями, причем i-е состояние канала Z в момент появления символа z означает наличие в соответствующем z векторе $\mathbf{c}$ ровно i элементов, равных B. Однако канал Z не является стационарным, так как его переходные вероятности $P(C_{i_2} | C_{i_1})$ зависят от номера элемента z на выходе канала. Действительно, если $c_{i_1}(j)$ соответствует некоторому элементу z_j, то $P(C_{i_2}(j+1) | C_{i_1}(j)) = P(C_{i_2}(n_\omega + 1) | C_{i_1}(n_\omega))$ при условии, что $j \neq n_\omega$.

Будем называть составной двоичный симметричный канал [2] периодически стационарным с периодом n_ω, если переходные вероятности этого канала

$$P(C_{i_2}(j_1 + 1) | C_{i_1}(j_1)) = P(C_{i_2}(j_2 + 1) | C_{i_1}(j_2))$$

для всех j_1, j_2 таких, что либо $j_1,\ j_2 \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, n_\omega)$, либо $j_1,\ j_2 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n_\omega)$. Под периодическими $P_\text{п}(m,\ n_\omega)$-характеристиками периодически стационарного с периодом n_ω канала Z мы будем понимать вероятности m ошибок на отрезках выходной последовательности канала длины n_ω, начинающихся с элементов с номерами $1, ..., n_\omega + 1, 2n_\omega + 1, ...$.

В дальнейшем нас будут интересовать только периодические характеристики канала Z, вычисляемые по матрице переходных вероятностей канала Z

$$\mathbf{P}(\mathrm{Z}) = \left\| P(C_{i_2} \left| C_{i_1} \right.) \right\|_{(n_t+1)\times(n_t+1)},$$

$$P(C_{i_2} \left| C_{i_1} \right.) = P(C_{i_2}(2) \,|\, C_{i_1}(1)),\ i_1, i_2 = \overline{1, n_t+1}$$

и вектору вероятностей ошибок в состоянии канала Z

$$\boldsymbol{\pi}(\mathrm{Z}) = \left\| \pi_i \right\|_{1\times(n_t+1)}.$$

Пусть есть n_ω-последовательность **c** состояний канала Гильберта и число плохих состояний в ней равно i_1. Тогда вероятность того, что ровно j из i плохих состояний перейдут снова в плохие состояния, равна

$$\binom{i_1}{j} P_{\omega\mathrm{BB}}^{j} (1 - P_{\omega\mathrm{BB}})^{i_1 - j}, \tag{2}$$

где $P_{\omega\mathrm{BB}}$ — вероятность перехода из B в B для дискретного отображения частотного подканала ЧВ-канала. Аналогично вероятность того, что ровно $i_1 - j$ состояний из $n - i_1$ хорошего состояния перейдут в плохое, равна

$$\binom{n - i_1}{i_2 - j} P_{\omega\mathrm{GB}}^{i_2 - j} (1 - P_{\omega\mathrm{GB}})^{n - i_1 - i_2 + j}, \tag{3}$$

где $P_{\omega\mathrm{GB}}$ — вероятность перехода из G в B для частотного подканала.

Умножая (2) на (3) и суммируя по $j \le \min\{i_1, i_2\}$, мы получаем вероятность перехода расширенного канала из состояния C_{i_1} в C_{i_2}:

$$P(C_{i_2} \left| C_{i_1} \right.) = \sum_{j=0}^{\min\{i_1, i_2\}} \binom{i_1}{j} \binom{n - i_1}{i_2 - j} \times$$

$$\times P_{\omega\mathrm{BB}}^{i_2 - j} (1 - P_{\omega\mathrm{BB}})^{i_1 - j} P_{\omega\mathrm{GB}}^{i_2 - j} (1 - P_{\mathrm{GB}})^{n - i_1 - i_2 + j}. \tag{4}$$

Вероятность π_i — вероятность хотя бы одной ошибки в n_t последовательности при условии, что этой последовательности соответствует вектор **C** с i плохими состояниями:

$$\pi_i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}. \tag{5}$$

Отметим, что рассмотрение дискретного отображения временных подканалов, имеющего большее число состояний, чем гильбертов канал, приводит лишь к увеличению числа состояний при рассмотрении расширенного ЧВ-канала. Приведенные нами формулы для вычисления переходных вероятностей позволяют проводить дальнейшие расчеты вероятности ошибки в ЧВ-канале по методике работы [7]. Однако вычисления по формуле (4) часто являются весьма трудоемкими. В дальнейшем в статье дается подход к приближенному вычислению требуемых характеристик.

Вычисление вероятности ошибочного декодирования в ЧВ-канале. Приближенные формулы

Сложность вычислений по формулам (2)–(4) для случая, когда в расширенном канале идентифицируется L состояний:

$$N(L) = k n_\omega^L,$$

где k — некоторая константа. Поэтому расчет по этим формулам величины $P_\text{ош}$ имеет сложность $N(n_t+1)$ и в большинстве практически важных случаев неосуществим. Заметим, однако, что последовательность величин π_i (5) быстро сходится к единице. Это позволяет различать в расширенном канале только $L_0 << n_t + 1$ состояний, причем L_0 выбирается таким образом, чтобы связанная с этим потеря в точности вычисления $P_\text{ош}$ не превышала допустимой величины. Модель расширенного канала с j состояниями обозначим через μ_j, вероятность ошибки, соответствующую этой модели, — через $P_\text{ош}(\mu_j)$, а сложность расчетов по этой модели — через $\chi(j)$. Тогда для величин $P_\text{ош}(\mu_j)$ и $\chi(j)$ имеют место следующие упорядоченности:

$$P_\text{ош} = P_\text{ош}(\mu_{n_t+1}) < P_\text{ош}(\mu_{n_t}) < \ldots < P_\text{ош}(\mu_1);$$

$$\chi(n_t+1) < \chi(n_t) < \ldots < \chi(1).$$

Существование конечного предела последовательности $P_\text{ош}(\mu_j)$ позволяет подбирать модель, обеспечивающую требуемую точность вычисления вероятности ошибки при минимальной сложности вычислений. С этой целью для моделей μ_2, μ_3, ... вычисляются величины $P_\text{ош}(\mu_j)$ до тех пор, пока разность $P_\text{ош}(\mu_{j_0+1}) - P_\text{ош}(\mu_{j_0})$ не станет меньше некоторого ε (ε выбирается меньше допустимой величины $P_\text{ош}$). Модель μ_{j_0} может считаться искомой.

Параметры модели μ_{j_0} вычисляются по параметрам модели μ_{n_t+1} следующим образом.

Пусть параметры модели μ_{n_t+1}:

— матрица переходных вероятностей

$$\mathbf{P} = \left\| P(C_{j_2} \left| C_{j_1} \right.) \right\|_{(n_t+1)\times(n_t+1)};$$

— вектор вероятностей ошибки в состояниях

$$\boldsymbol{\pi} = \left\| \pi_j \right\|_{1\times(n_t+1)};$$

— безусловные вероятности состояний

$$P(C_1), \ldots, P(C_{n_t+1}).$$

Введем обозначения для параметров модели μ_i:
— матрица переходных вероятностей

$$\mathbf{P}_i = \left\| \mathrm{P}_i(C_{j_2} \middle| C_{j_1}) \right\|_{i\times i};$$

— вектор вероятностей ошибки в состояниях

$$\boldsymbol{\pi}_i = \left\| \pi_{ij} \right\|_{1\times i};$$

— безусловные вероятности состояний

$$P_i(C_1), \ldots, P_i(C_i).$$

Тогда величины $\mathbf{P}_i$, π_i, $P_i(C_j)$ могут быть определены по формулам

$$P_i(C_{j_2} | C_{j_1}) = P(C_{j_2} | C_{j_1}) \text{ для } j_1, j_2 \in \{1, \ldots, i-1\};$$

$$P_i(C_i | C_{j_1}) = \sum_{j=i}^{n_t+1} P(C_j | C_{j_1}) \text{ для } j_1 = \overline{1, i-1};$$

$$P_i(C_{j_2} | C_i) = \sum_{j=i}^{n_t+1} P(C_{j_2} | C_j) \text{ для } j_2 = \overline{1, i-1};$$

$$P_i(C_i | C_i) = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} P_i(C_j | C_i);$$

$$\begin{cases} \pi_{ij} = \pi_j \\ \pi_{ij} = 1 \end{cases} \text{для } j \le i-1;$$

$$P_i(C_j) = P(C_j) \text{ для } j = \overline{1, j-1};$$

$$P_i(C_i) = \sum_{j=i}^{n_t+1} P(C_j).$$

В заключение приведем нижнюю оценку вероятности ошибочного декодирования в ЧВ-канале. В качестве нижней оценки вероятности $P_{\text{ош}}$ мы будем использовать вероятность ошибочного декодирования в модели составного канала Гильберта, представляющей собой систему n_ω независимых каналов, каждый из которых является каналом Гильберта. Вероятность m-кратной ошибки на длине n_ω в расширенном ЧВ-канале

$$P(m, n_\omega) = \binom{n_\omega}{m} P_0^m (1 - P_0)^{n_\omega - m},$$

где $P_0 = \frac{1}{2} P(\text{B})$, $P(\text{B})$ — вероятность плохого состояния в канале Гильберта — дискретном отображении временных подканалов ЧВ-канала. Для оценки величины P_0 может быть также использована оценка

$$P_0 < \frac{1}{2h^2 + 2},$$

где h^2 — среднее отношение сигнал/шум в канале.

Таким образом, выбирая вычислительно приемлемую модель расширенного канала и используя формулы (2)–(4), можно получить удовлетворительные оценки вероятности ошибочного декодирования.

Заключение

В статье предложена схема построения модели для дискретных каналов с памятью и описана методика оценки вероятности ошибочного декодирования на основе выбранной модели. Полученная методика позволяет с умеренной вычислительной сложностью выбирать метод кодирования для каналов с памятью.

Литература

1. **Blaunstein N., Andersen J. B.** Multipath Phenomena in Cellurar Networks. — Boston: Artech House, 2002. — 296 p.
2. **Krouk E., Ovchinnikov A., Poikonen J.** Channel Models and Reliable Communication // Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications; E. Krouk, S. Semenov eds. — John Wiley and Sons, 2011. P. 1–20.
3. **Krouk E. A., Ovchinnikov A. A.** Metrics for Distributed Systems // Proc. of XIV Intern. Symp. on Problems of Redundancy in Information and Control Systems, Saint-Petersburg, June 1–5, 2014. Saint-Petersburg, 2014. P. 66–70.
4. **Коржик В. И., Финк Л. М.** Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах со случайной структурой. — М.: Связь, 1975. — 280 с.
5. **Крук Е. А.** Комбинаторное декодирование линейных блоковых кодов. — СПб.: ГУАП, 2007. — 238 с.
6. **Прохорова В. Б.** Методы повышения надежности передачи информации в распределенных энергетических сетях. — СПб.: ГУАП, 2013. — 70 с.
7. **Крук Е. А., Прохорова В. Б.** Расчет вероятностных характеристик для дискретных каналов с памятью // Информационно-управляющие системы. 2007. № 5(30). С. 56–58.
8. **Крук Е. А.** Класс оптимальных кодов для параллельных каналов // Проблемы избыточности в информационных системах: тр. VII симп., Ленинград, 12–17 июня 1977 г. Л., 1977. Ч. 2. С. 91–94.

9. **Крук Е. А., Овчинников А. А.** Многоантенная передача данных в беспроводных сетях. — СПб.: ГУАП, 2013. — 84 с.
10. **Сидоренко В. Р.** Класс кодов для исправления ошибок решетчатой конфигурации // Проблемы передачи информации. 1976. Т. 12. Вып. 3. С. 3–13.
11. **Ovchinnikov A., Semenov S.** MIMO // Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications; E. Krouk, S. Semenov eds. — John Wiley and Sons, 2011. P. 301–350.

UDC 621.391

Evaluation of Error-Correction Capability for Two-Dimensional Coding in a Time-Frequency Channel

Krouk E. A.[a, b], Dr. Sc., Tech., Professor, ekrouk@vu.spb.ru

Prokhorova V. B.[b], Deputy Head, vb@mobivita.ru

[a]Institute of Information Systems and Information Security of Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

[b]Institute of Information Technologies in Education of Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: To contend with communication channel impairments, the errors typical for a given channel should be specified. This requires a definition of the channel model which would allow to estimate probabilities within it. The simplest classical channel models are inadequate for the description of modern information transmission systems. We have to consider more complex models; this leads to the problem of computations in these models. **Results:** In this paper, a the two-dimensional (time-frequency) communication channel is discussed. We evaluate the transition probabilities of the channel with finite number of states, allowing to apply the technique of decoding error probability evaluation in a one-dimensional (time or frequency) channel to the estimation of error probability in the two-dimensional channel. In many practical cases, the obtained evaluations may require excessive computational resources, so a simplifying technique is proposed for the computations, based on the reduction of the number of states, taking into account the acceptable inaccuracy of the computations. **Practical relevance:** The obtained results help in choosing a computationally acceptable channel model, for which the satisfactory bounds on erroneous decoding probability can be evaluated.

Keywords — Time-Frequency Communication Channel, Error-Correcting Codes, Decoding Error Probability.

References

1. Blaunstein N., Andersen J. B. *Multipath Phenomena in Cellurar Networks*. Boston, Artech House, 2002. 296 p.
2. Krouk E., Ovchinnikov A., Poikonen J. Channel Models and Reliable Communication. In: *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Semenov S., Krouk E., eds. John Wiley and Sons, 2011, pp. 1–20.
3. Krouk E. A., Ovchinnikov A. A. Metrics for Distributed Systems. *Proc. of XIV Intern. Symp. on Problems of Redundancy in Information and Control Systems*, Saint-Petersburg, 2014, pp. 66–70.
4. Korzhik V. I., Fink L. M. *Pomekhoustoichivoe kodirovanie diskretnykh soobshchenii v kanalakh so sluchainoi strukturoi* [Error-Correcting Coding of Discrete Messages in Channels with Random Structure]. Moscow: Svyaz Publ., 1975. 280 p. (In Russian).
5. Krouk E. A. *Kombinatornoe dekodirovanie lineinykh blokovykh kodov* [Combinatorial Decoding of Linear Block Codes]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2007. 238 p. (In Russian).
6. Prokhorova V. B. *Metody povysheniia nadezhnosti peredachi informatsii v raspredelennykh energeticheskikh setiakh* [Methods of Information Transmission Reliability Increasing in Distributed Power Networks]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2013. 70 p. (In Russian).
7. Krouk E. A., Prokhorova V. B. Computation of Probability Characteristics for Discrete Channels with Memory. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2007, no. 5, pp. 56–58 (In Russian).
8. Krouk E. A. The Class of Optimal Codes for Parallel Channels. *Trudy VII Simpoziuma po problemam izbytochnosti v informatsionnykh sistemakh* [Proc. VII Symp. on Problems of Redundancy in Information Systems]. Leningrad, 1977, vol. 2, pp. 91–94 (In Russian).
9. Krouk E. A., Ovchinnikov A. A. *Mnogoantennaia peredacha dannykh v besprovodnykh setiakh* [Multi-Antenna Data Transmission in Wireless Networks]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2013. 84 p. (In Russian).
10. Sidorenko V. R. Class of Correcting Codes for Errors with a Lattice Configuration. *Problemy peredachi informatsii,* 1976, vol. 12, no. 3, pp. 3–13.
11. Ovchinnikov A., Semenov S. MIMO. In: *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Semenov S., Krouk E., eds. John Wiley and Sons, 2011, pp. 301–350.